1. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας ομογενούς γ. δ. ε. με πραγματικούς σταθερούς συντελεστές $L(y) = 0$ είναι το $p(\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 3)^3(\lambda + 2)(\lambda + 1)^4$.
<u>*Υπόδ.:*</u> Από τις ρίζες του χ.π. προκύπτει ότι ένα βασικό σύνολο λύσεων είναι το $\{e^{-2t}, t^k e^{-t}[k = 0, 1, 2, 3], t^k e^{-t}cos(\sqrt{2}t), t^k e^{-t}sin(\sqrt{2}t)[k = 0, 1, 2]\}$.
Να εξετασθεί η αλήθεια των προτάσεων:
α) Η εξίσωση έχει μη φραγμένες λύσεις: η λύση e^{-t} είναι μη φραγμένη στο $(-\infty, 0]$.
β) Όλες οι λύσεις της εξίσωσης είναι ταλαντούμενες: όχι, η λύση e^{-t} δεν ταλαντώνεται.
γ) Η εξίσωση δεν έχει μονότονες λύσεις: όχι, η λύση e^{-t} είναι γνήσια φθίνουσα.
δ) Υπάρχει λύση της εξίσωσης που τείνει στο 2017 για $t \to +\infty$: από το β.συν.λ. προκύπτει ότι όλες οι λύσεις τείνουν στο 0 για $t \to +\infty$.
Να εξετασθεί η αλήθεια των α), β) και δ) για τις λύσεις της μη ομογενούς εξίσωσης $L(y) = t^3$.
<u>*Υπόδ.:*</u> Από την μορφή του χ.π. προκύπτει ότι μια μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, κ.λ.π..

2. i) Να διατυπωθεί ο ορισμός του βασικού συν. λύσεων. <u>*Υπόδ.:*</u> **Σελ. 69,** πρώτη πρόταση.

ii) Αν $B = \{y_1, y_2, y_3\}$ είναι συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους τρίτης τάξης σε ένα διάστημα I και $W(y_1, y_2, y_3)(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει ομογενής διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης που έχει το B ως ένα βασικό σύνολο λύσεων. <u>*Υπόδ.:*</u> **Θεώρημα 8,** σελ. 71-72 (χωρίς το μονοσήμαντο).

iii) Να βρεθεί μια ομογενής διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης που έχει ως λύσεις τις συναρτήσεις $e^x, x^2, sinx, \quad x \in \mathbb{R}$. <u>*Υπόδ.:*</u> Άμεσα από το προηγούμενο ερώτημα αφού αποδειχθεί ότι η $W(e^x, x^2, sinx)(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$.

iv) Να εξετασθεί αν το σύνολο $\{e^x, x^2, sinx\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων και αν η συνάρτηση xe^x είναι μια λύση της εξίσωσης που βρέθηκε στο ερώτημα iii). <u>*Υπόδ.:*</u> Αρκεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ με $xe^x = c_1e^x + c_2x^2 + c_3sinx = 0$.

3. i) Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $y^2 + 4ye^x + 2(y + e^x)y' = 0$, και να εξετασθεί αν υπάρχουν λύσεις y της δ. εξίσωσης με $\lim_{x\to+\infty} y(x) = b > 0$. <u>*Υπόδ.:*</u> **Παράδειγμα 1, σελ. 46.** Αν ναι, τότε θα πρέπει (...) $y' \to -2b$, άτοπο (;).

ii) Να διαπιστωθεί ότι η $y_1 = x$ είναι μια λύση της εξίσωσης $-2y' + (\frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x} = 0$ και, στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση y με $y(1) = 2$. <u>*Υπόδ.:*</u> α′ τρόπος: εξίσωση Bernoulli. β′ τρόπος : Αν θέσουμε $y = zx$, τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι Bernoulli, επίσης, χωριζ. μεταβλητών.

4. Να λυθεί η εξίσωση $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0, x \geq 1, \lambda \in \mathbb{R}.(E)$ Στη συνέχεια, να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το πρόβλημα συνοριακών τιμών $(E) - (C)$ με $y(1) = 0 = y(e), (C)$ δέχεται και μη μηδενικές λύσεις. Υπάρχει λύση του $(E) - (C)$ που έχει 2018 ρίζες στο $(1, e)$; <u>*Υπόδ.:*</u> **Παράδειγμα 6**, σελ. 135-136. [Δεν απαιτείται η (S).] Ναι, $n \geq 2020$ (...).

5. Να λυθεί η μη ομογενής διαφορική εξίσωση $y'' - 2(ctgx)y' + (1 + 2ctg^2x)y = sinx, \quad x \in (0, \pi)$ αφού διαπιστωθεί ότι η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση έχει λύσεις της μορφής $sinx, xsinx$, και να εξετασθεί αν υπάρχει λύση y_0 της μη ομογενούς που ικανοποιεί τις $y_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = y_0'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. <u>*Υπόδ.:*</u> **Άσκηση Β-4,** σελ19, Φυλλ. λυμ. ασκήσεων.

6. i) Αν οι f, g ικανοποιούν συνθήκες Lipschitz σε ένα σύνολο S, να εξετάσετε αν το ίδιο συμβαίνει και για τις συναρτήσεις $|f|$, fg, f/g με $g) \neq 0$ στο S, gof. <u>*Υπόδ.:*</u> $||f(t, x)| - |f(t, y)|| \leq |f(t, x) - f(t, y)|$, όχι ($f = g = x, x > 0$), όχι ($f = 1, g = x, x \in (0, 1)$), $|g(f(x)) - g(f(y))| \leq L_1|f(x) - f(y)| \leq L_1L_2|x - y|$.

ii) Να εξετασθεί το π.α.τ. $y' = \sqrt{2} + sin(y^3 + y), t \geq 0, \quad y(0) = \alpha$, ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων και να διατυπωθούν οι προτάσεις που χρησιμοποιούνται. *Υπόδ.:* Η συνάρτηση $f(t, y) = \sqrt{2} + sin(y^3 + y)$ έχει συνεχή μερική παράγωγο ως προς y σε οποιοδήποτε $R := \{(t, y) : |x| \leq a, |y - a| \leq b\}$ [**(i), σελ. 11-12, Θεώρημα 1**, σελ. 12].

Να εξετασθεί αν υπάρχουν α) ταλαντούμενες λύσεις, β) φραγμένες λύσεις, γ) μονότονες λύσεις. Αν y είναι λύση του π.α.τ., να εξετασθεί η ύπαρξη των ορίων $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{y(t)}{\sqrt{t}}$ και $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{y(t)}{t^2}$.

Υπόδ.: Αν υπάρχει λύση y ορισμένη στο $[0, \infty)$ τότε από την εξίσωση προκύπτει ότι $0 < \sqrt{2} - 1 \leq y' \leq \sqrt{2} + 1$ και συνεπώς

$$\alpha + (\sqrt{2} - 1)t \leq y(t) \leq \alpha + (\sqrt{2} + 1)t, \quad t \geq 0.$$